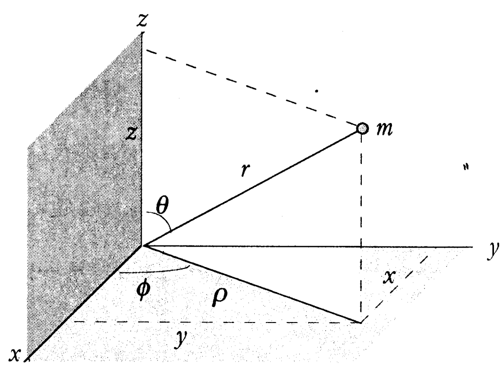
الحركة على خط مستقيم

(Motion on a Straight line)

1 - 1 تمهيد :

يصف الميكانيك حركة الأجسام وأسبابها وما ينتج عنها من شغل وطاقة. وتتلخص دراسة الحركة *(kinematics)* بتحديد موضع الجسم، وسرعته، وتسارعه، في كل لحظة من الزمن، بينما يعني التحريك *(dynamics)* بدراسة أسباب الحركة من قوة وعزم.

عندما ندرس حركة جسم فإننا نتابع موضعه **r** وسرعته **v** وتسارعه **a** في كل لحظة من الزمن. نقوم عادة بتحديد الموضع في الفضاء (بالنسبة لنا) بمتجه **r** له ثلاثة إحداثيات، بحسب منظومة المحاور التي نختارها. فيمكن استخدام الإحداثيات **الديكارتية** *(cartesian)*، أو **الكروية** *(spherical)*، أو **الاسطوانية** *(cylindrical)* لتحديد موضع الجسم، كما في الشكل (1-1) ، علماً بأن اختيار نوع واتجاه الإحداثيات عائد إلى المراقب *(observer)* أو **مناط الإسناد** *(frame of reference)* الذي يتابع الحركة.



الشكل (1-1)

إذا حددنا موضع الجسم بالمتجه **r** عندئذ نجد متجه سرعته **v** من العلاقة:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (1-1)$$

ومتجه تسارعه من العلاقة:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad (2-1)$$

من الواضح أن تحديد أحد المتجهات $\mathbf{r}$، أو $\mathbf{v}$، أو $\mathbf{a}$، مع معرفة حالة الجسم في لحظة ما (الشروط الابتدائية *(initial conditions)*) كاف لمعرفة المتغيرين الآخرين بشكل تام.

لابأس من الإشارة هنا إلى أنه عندما نقول إننا نحدد موضع جسم فإننا نميز نقطة معينة منه (كمقدمة سيارة أو مركز كرة مثلاً) ونتابع حركتها مع مرور الزمن. هذا مقبول طالما تحرك الجسم على خط مستقيم. أما لو تحرك الجسم بشكل دوراني أو دوراني وانتقالي معاً لوجب علينا عندئذ أن نحدد موضع كل نقطة منه، أو البحث عن نقطة معينة يمكن اعتبارها ممثلة للجسم كله. سنأتي على هذا الموضوع فيمابعد.

1 - 2 قوانين التحريك *(Newton's Laws of Motion)*

تعتبر قوانين التحريك (التي تسمى عادة قوانين نيوتن) المنطلق الأساس في الميكانيك لدراسة حركة وتحريك الأجسام ، ووصف طبيعة الحركة والمسارات الممكنة لها . هذه القوانين هي:

1 - 2 -1 قانون نيوتن الأول *(Newton's First Law)*: العطالة أو القصور الذاتي *(Inertia)*:

يبقى أي جسم على حالته الحركية مالم تؤثر عليه محصلة قوى خارجية غير معدومة.

يفيد هذا القانون في إعطاء الأجسام المادية خاصة هامة هي **العطالة** أو **القصور الذاتي** *(inertia)* بمعنى أن أي جسم قاصر عن تغيير حالته الحركية تلقائياً بل لابد من مؤثر خارجي للقيام بذلك.

من جهة أخرى فإن القانون الأول هو تعريف **للقوة**، كمؤثر خارجي يغير الحالة الحركية للجسم وفي اللحظة التي ينتهي فيها تغير الحالة الحركية تختفي القوة أيضاً.

يحدد **متجه السرعة** الحالة الحركية للجسم *(state of motion)* وعندما يبقى الجسم بنفس الحالة فهذا يعني أن متجه سرعته لم يتغير لاقيمة ولااتجاهاً، ويبقى متحركاً على نفس الخط الذي كان عليه.

لاشك في أن القول بأن حركة جسم تتم على خط مستقيم بسرعة ثابتة يعتمد على المراقب

أو مناط الإسناد الذي يتابعه. فسرعة شخص ينتقل من مكان لآخر في قطار متحرك ليست واحدة بالنسبة لراكب في القطار ولمودع على رصيف المحطة. لذا فإن قانون نيوتن الأول يجبرنا على تحديد **منظومة محاور إحداثية عطالية** ثابتة في الفضاء *(inertial coordinate system)* يكون فيها هذا القانون صحيحاً دوماً، بحيث ننسب إليها السرع كافة لنقرر فيما إذا كان جسم ما يتحرك أم لا. من الواضح أن تحديد منظومة كهذه صعب عملياً لأن منظومة المحاور العطالية الثابتة بشكل مطلق لاتوجد الاّ في مركز الكون، أما أي منظومة أخرى كغرفة المختبر أو سطح الأرض، فهي غير ثابتة نتيجة الحركة المستمرة للأرض. غير أنه يمكن أن نقبل عملياً بمنظومة محاور مرتبطة بغرفة المختبر مثلاً عندما ندرس حركة أجسام فيه بحيث تكون سرعة المختبر نفسه مهملة بالمقارنة مع سرع هذه الأجسام، أو نعتبر منظومة محاور مرتبطة بالأرض عندما ندرس حركة أجسام بالقرب من سطحها إذا كانت سرعة دوران الأرض حول نفسها أو حول الشمس مهملة بالمقارنة مع سرع الأجسام المعتبرة، وهكذا دواليك.

يمكن صياغة قانون نيوتن الأول رياضياً على النحو :

$$\mathbf{F}_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \text{ثابت} \qquad (3-1)$$

حيث $\mathbf{F}_T$ محصلة القوى المؤثرة على الجسم و $\mathbf{v}$ سرعته.

يستخدم قانون نيوتن الأول لدراسة الاتزان السكوني للأجسام ضد الحركة الانتقالية.

1 - 2 -2 قانون نيوتن الثاني *(Newton's Second Law)*:

"يتناسب تسارع جسم طردياً مع محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه وعكسياً مع كتلته" "

يفيد هذا "القانون" في تعريف الكتلة. فمن المعروف أن حمل حجر كبير أو محاولة تحريكه أصعب بكثير من حمل أو تحريك قطعة خشب صغيرة. لذا نقول إن الحجريمانع أي تغيير في حالته الحركية أكثر مماتمانع الخشبة. **فالكتلة هي مقدار ممانعة الجسم لأي تغيير في حالته الحركية الانتقالية.**

من جهة أخرى لو أعطينا شخصاً جسماً وطلبنا منه التأكد فيما إذا كان له كتله أم لا فإنه يقوم بوزنه لكن الوزن ماهو إلاّ تأثير كتلة أخرى (الأرض) على الجسم. أي أن تحديد كتلة جسم ما يتم بدراسة التأثير المتبادل بينه وبين الكتل الأخرى. فتعريف الكتلة من هذا المنطلق هي مقدار تأثير جسم على غيره من الأجسام نتيجة خاصته الكتلية هذه.

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \qquad (8-1)$$

أطلق نيوتن اسم **كمية الحركة** *(quantity of motion)* على $m\mathbf{v}$ ، الاّ أنه اصطلح على استخدام تعريف **الزخم الخطي** *(linear momentum)* أو زخم فقط ، يرمز له بـ $\mathbf{p}$، أي أن:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (9-1)$$

بذلك نكتب قانون نيوتن الثاني على النحو:

$$\mathbf{F}_T = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (10-1)$$

إن قانون نيوتن الثاني ليس قانوناً فعلاً وإنما تعريف للقصور الذاتي لجسم .

1 - 2 -3 قانون نيوتن الثالث: الفعل ورد الفعل *(Newton's Third Law)*

يمكن كتابة (1-6) على الشكل:

$$\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B \qquad (11-1)$$

تعطي العلاقة السابقة الشكل الرياضي لقانون نيوتن الثالث الذي ينص على أنه :

إذا أثر جسم أول A بقوة $\mathbf{F}_{AB}$ على جسم ثاني B فإن الجسم الثاني B يؤثر بقوة $\mathbf{F}_{BA}$ على الجسم الأول مساوية ومعاكسة لـ $\mathbf{F}_{AB}$ ، أي أن $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$.

كثيراً مايقرأ قانون نيوتن الثالث بالشكل المبسط: **لكل فعل رد فعل يساويه بالقيمة ويعاكسه بالاتجاه**. لكن نوضح هنا أن قوتي الفعل ورد الفعل (كما سماهما نيوتن) تؤثران على جسمين مختلفين دوماً لذلك فإن محصلتهما لاتكون مساوية للصفر إلاّ إذا اعتبرنا حركة الجسمين معاً كمنظومة واحدة. أما إذا درسنا حركة أحدهما فقط فنجد أنه يخضع لتأثير الجسم الآخر عليه دوماً.

يمكن كتابة القانون الثالث بطريقة مختلفة قليلاً بالتعويض عن $\mathbf{F}_{AB}$ و $\mathbf{F}_{BA}$ بدلالة $\mathbf{p}_A$ و $\mathbf{p}_B$ عندها تؤول (1-11) إلى:

$$\frac{d\mathbf{p}_A}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_B}{dt} \qquad (12-1)$$

أو

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B) = 0 \qquad (13-1)$$

أي أن:

$$\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \text{ثابت} \qquad (14-1)$$

فالقانون الثالث يعني أن الزخم الخطي لجسمين يؤثران على بعضهما بقوتي الفعل ورد الفعل ثابت دوماً وهذه النتيجة هي حالة خاصة من مبدأ حفظ الزخم الخطي الذي ينص على أن **الزخم الخطي لمنظومة معزولة** (isolated system) **، أي خاضعة لمحصلة قوى معدومة، لايتغير مع الزمن.**

1 - 3 نظريات الزخم والطاقة لجسم يتحرك على خط مستقيم

عندما يتحرك جسم على خط مستقيم، مثل محور السينات، عندئذ يؤول قانون نيوتن الثاني إلى:

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} \qquad (15-1)$$

بمكاملة طرفي العلاقة السابقة نجد:

$$p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F(x, v, t)\ dt \qquad (16-1)$$

حيث وضحنا في العلاقة السابقة أنه يمكن للقوة F أن تعتمد على الموضع x والسرعة v والزمن t.

تمثل العلاقة (16-1) الشكل التكاملي (*integral form*) **لنظرية الزخم**، ويطلق على كل طرف فيها اسم **الدفع** (*impulse*) يرمز له بـ J، أي أن:

$$J = p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F(x, v, t)\ dt \qquad (17-1)$$

نعرف **الطاقة الحركية** (*kinetic energy*) للجسم بالعلاقة:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \tag{18-1}$$

باشتقاق العلاقة الأخيرة، مفترضين أن m ثابتة، نجد:

$$\frac{dT}{dt} = m v \frac{dv}{dt} = v \left(m \frac{dv}{dt} \right)$$

أي أن:

$$\frac{dT}{dt} = F v = P \tag{19-1}$$

هذا هو الشكل التفاضلي **لنظرية الطاقة** (*differential form*) حيث يمثل الطرف الأيمن $P = F v$ **القدرة اللحظية** (*instantaneous power*) للقوة F.

نحصل على الشكل التكاملي للنظرية السابقة بمكاملة (1-19) فنجد:

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} F v \, dt \tag{20-1}$$

بتعويض $v = dx/dt$ في (1-20) نجد:

$$T_2 - T_1 = \int_{x_1}^{x_2} F \, dx \tag{21-1}$$

بما أن التكامل في الطرف الأيمن من (1-21) هو شغل **F** عندما ينتقل الجسم من x_1 إلى x_2،:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F \, dx \tag{22-1}$$

فنحصل على **نظرية الشغل والطاقة** *(Work - Energy Theorem)*:

$$W = T_2 - T_1 \tag{23-1}$$

نلاحظ أن هذه النظرية تنص على أن شغل **محصلة** القوى المؤثرة على منظومة عندما تنتقل بين نقطتين يساوي تغير الطاقة الحركية لها بينهما.

أخيراً، نربط العلاقة بين القدرة p والشغل W من (1-19) و (1-21) و (1-22) فنجد:

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad (24-1)$$

فالقدرة اللحظية لقوة F مؤثرة على جسيم يساوي معدل تغير شغلها بالنسبة للزمن.

ندرس فيما يلي حركة منظومة خاضعة لمحصلة قوى ذات أشكال مختلفة.

1 - 4 حركة جسم خاضع لقوة ثابتة

إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على جسم ثابتة، عندئذ نجد من قانون نيوتن الثاني:

$$a = \frac{F}{m} = \text{ثابت}$$

ومنه :

$$v = \int a\,dt = a\,t + v_0$$

و

$$x = \int v\,dt = \tfrac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0\,t + x_0$$

هذه هي قوانين الحركة بتسارع ثابت، حيث تدل v_0 و x_0 على السرعة والموضع في اللحظة $t = 0$ (لحظة بدء المراقبة وليس بدء الحركة).

❏ مثل 1-1 انزلاق جسّم على مستو مائل

لنعتبر انزلاق جسم m على مستو مائل بدون احتكاك، كما في الشكل (1-2أ)،عندئذ نجد أن محصلة القوى المؤثرة عليه هي:

$$F_T = m\,g\sin\theta = ma$$

ومنه :

$$a = g\sin\theta$$

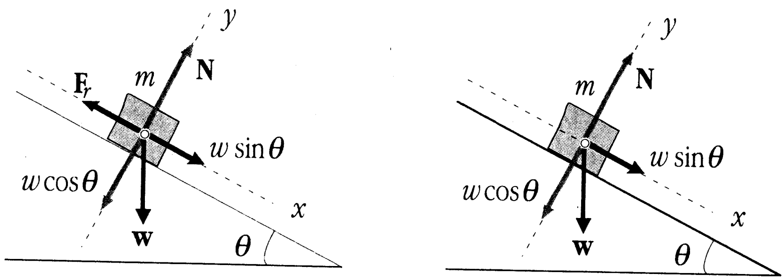
فالتسارع ثابت لايعتمد على كتلة الجسم.

الآن: إذا كان المستوي خشناً فإن محصلة القوى تصير (انظر الشكل (1-2 ب)):

$$F_T = m\,g\sin\theta - F_r$$

حيث F_r قوة الاحتكاك بين الجسم والسطح وتساوي:

$$F_r = \mu N$$



(ب) الشكل (2-1) (أ)

حيث N رد فعل السطح ويساوي في حالتنا هذه:

$$N = m\,g\cos\theta$$

فتصير F_T:

$$F_T = m\,g(\sin\theta - \mu\cos\theta) = ma$$

ويصير التسارع:

$$a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

فلايزال a مستقل عن كتلة الجسم، وموجب، أي أن سرعة الجسم ستتزايد، طالما أن:

$$\tan\theta > \mu$$

أما إذا كانت θ تساوي قيمة معينة α حيث:

$$\tan\alpha = \mu$$

التي تسمى **زاوية الاحتكاك** (*angle of friction*)، عندئذ يكون $a = 0$. فإما أن يبقى الجسم ساكناً على المستوي أو ينزلق بسرعة ثابتة إذا أُعطي دفعة خفيفة نحو الأسفل في البدء.

أما إذا كانت $\theta < \alpha$ فيصير التسارع سالباً وإذا دفعنا الجسم على المستوي نحو الأسفل فسيتوقف بعد مسافة معينة تعتمد على سرعته الابتدائية.

لابأس من الإشارة إلى أنه لو دفعنا الجسم على المستوي نحو الأعلى لصار تسارعه:

$$a = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$ ❐

1 - 5 حركة جسم خاضع لقوة متغيرة مع الزمن

إذا خضع جسم لقوة متغيرة مع الزمن، عندئذ نكتب (1-16) بالشكل:

$$m(v - v_0) = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt \qquad (25-1)$$

حيث v_0 سرعة الجسم في لحظة ما t_0 بينما v سرعته في اللحظة t. يطلق على v_0 و t_0 اسم الشروط الابتدائية. من ثم نكتب من (1-25):

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}\int_{t_1}^{t_2} F(t')\ dt' + v_0 \qquad (26-1)$$

بمكاملة العلاقة الأخيرة نجد موضع الجسم في أي لحظة:

$$x = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\left[\int F(t')\,dt'\right]dt'' \qquad (27-1)$$

❐ مثل 1-2 حركة جسيم مشحون في مجال كهربائي متغير

يتحرك إلكترون في مجال كهربائي متغير على النحو $E = E_0\cos(\omega t + \phi)$ والمطلوب تحديد كيف يتغير موضعه مع الزمن .

الحل: نكتب القوة المؤثرة عليه على النحو:

$$F = qE = -\,eE_0\cos(\omega t + \phi)$$

حيث وضعنا شحنة الإلكترون $q = -e$، وأهملنا وزنه بالمقارنة مع القوة الكهربائية، لتصير معادلة الحركة:

$$m\frac{dv}{dt} = -eE_0\cos(\omega t + \phi)$$

بمكاملة هذه المعادلة نجد:

$$v = v_0 + \frac{eE_0 \sin\phi}{m\omega} - \frac{eE_0}{m\omega}\sin(\omega t + \phi)$$

حيث افترضنا أن سرعة الجسم في اللحظة $t = 0$ هي v_0.

بالمكاملة مرة أخرى نجد:

$$x = -\frac{eE_0 \cos\phi}{m\omega^2} + v_0 t + \frac{eE_0 \sin\phi}{m\omega} t + \frac{eE_0}{m\omega^2}\cos(\omega t + \phi)$$

حيث وضعنا $x_0 = 0$ في اللحظة $t = 0$. ❐

---

6 - 1 حركة جسم خاضع لقوة متغيرة مع السرعة - قوى التخامد

إذا خضع جسم لقوة متغيرة مع السرعة فقط، أي $F = F(v)$ عندئذ تصير معادلة الحركة:

$$m\frac{dv}{dt} = F(v)$$

ومنه:

$$\frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m}dt$$

أي أن:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m}t \qquad (28-1)$$

بفرض أنه يمكن إجراء التكامل (1-28) والحصول على كيفية تغير v مع الزمن، عندئذ يمكن الحصول على تغيرات المسافة x مع الزمن بتكامل آخر مباشرة.

❐ مثل 1-3

يسير زورق بسرعة v_0 عندما ينطفئ محركه ليتباطأ نتيجة الاحتكاك مع الماء بقوة متناسبة مع سرعته. كيف تتغير المسافة التي يقطعها مع الزمن؟

الحل: لنكتب قانون نيوتن الثاني:

$$m\frac{dv}{dt}=-bv$$

حيث وضعنا b ثابت تناسب قوة التخامد. من ثم نجد:

$$\frac{dv}{v}=-\frac{b}{m}dt$$

ومنه:

$$v=v_0\, e^{-\frac{b}{m}t}$$

من الواضح أن الزورق لن يقف إلاّ بعد زمن طويل جداً بالمقارنة مع m/b.

أما المسافة التي يقطعها الزورق فنجدها من العلاقة:

$$x=\int v\,dt=\frac{mv_0}{b}(1-e^{-\frac{b}{m}t})$$

حيث افترضنا أنه كان عند $x_0=0$ في اللحظة $t=0$.

يمكن نشر v و x بحسب سلسلة تايلور فنجد:

$$v=v_0-\frac{bv_0}{m}t+\ldots$$

و

$$x=v_0\,t-\frac{1}{2}\frac{bv_0}{m}t^2+\ldots$$

حيث نلاحظ أن السرعة والمسافة تتغيران لحظة انطفاء المحرك (عندما يكون الزمن t صغيراً جداً) كما لو كان الجسم خاضعاً لقوة مقاومة ثابتة تساوي $-b\,v_0$. □

---

1 - 7 حركة جسم خاضع لقوة تعتمد على الموضع - القوى المحافظة

تعتبر مسألة جسم خاضع لقوة تعتمد على الموضع فقط من أهم المسائل في الفيزياء لأن القوى الطبيعية كالجاذبية والكهربائية، تعتمد على الموضع.

في هذه الحالة نكتب:

$$F = F(x) \qquad (29-1)$$

باستخدام نظرية الشغل والطاقة نكتب:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F\, dx \qquad (30-1)$$

يمثل التكامل في الطرف الأيمن شغل F عندما ينتقل الجسم من x_0 إلى x .

إذا عرّفنا **طاقة الوضع** (أو الطاقة الكامنة) (*potential energy*) بالعلاقة:

$$U(x) = -\int_{x_s}^{x} F\, dx \qquad (31-1)$$

حيث x_s موضع اختياري تكون فيه القوة وطاقة الوضع مساوية للصفر (أي موضع اتزان للجسم)، عندئذ تكون طاقة الوضع الناتجة عن القوة F مساوية لشغلها عندما تنقل الجسم من x إلى الموضع الاختياري x_s .

عندما ينتقل الجسم من x_1 إلى x_2 عندئذ يؤول شغل F إلى:

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx &= \int_{x_1}^{x_s} F(x)\, dx + \int_{x_s}^{x_2} F(x)\, dx \\
&= -\int_{x_s}^{x_1} F(x)\, dx - \left(-\int_{x_s}^{x_2} F(x)\, dx\right) \\
&= U(x_1) - U(x_2)
\end{aligned}$$

وتصير نظرية الشغل والطاقة على النحو:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = U(x_1) - U(x_2) \qquad (32-1)$$

أو:

$$U(x_1) + \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + U(x_2) \qquad (33-1)$$

يسمى المقدار:

$$E=\frac{1}{2}mv^2+U(x) \tag{34-1}$$

الطاقة الميكانيكية الكلية (*total mechanical energy*).

نلاحظ من (33-1) أن E ستبقى ثابتة طالما أن القوة المؤثرة على الجسم تعتمد على الموضع فقط ويمكن إيجاد طاقة وضع للجسم منها، أي أنها محافظة. سنعود إلى تعريف قوى كهذه بعد قليل.

يمكن الاستفادة من (34-1) لمعرفة تغيرات المسافة مع الزمن بكتابتها على النحو:

$$v=\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))} \tag{35-1}$$

فنجد:

$$\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}}\,dt$$

أو :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(E-U(x))}}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}}\,(t-t_0) \tag{36-1}$$

بإجراء التكامل السابق يمكن تحديد كيفية تغير الموضع مع الزمن. بذلك نكون قد قمنا بإيجاد الحل الكامل للمسألة (نظرياً على الأقل)!

❐ مثل 4-1

يتحرك جسيم على خط مستقيم بدءاً من السكون عند النقطة $x=a$ خاضعاً لقوة إرجاع $F=-kx$. ماطاقة وضعه وكيف يتغير بعده عن المبدأ $(x=0)$؟

الحل: نحسب أولاً طاقة وضع الجسيم فنستخدم (31-1) فنجد $U(x)=kx^2/2$ إذ أخذنا $x_s=0$ حيث يكون الجسيم متزناً $(U(x)=F(x)=0)$.

بما أن الجسيم كان ساكناً في اللحظة $t=0$ لذلك نجد من (34-1) أن:

$$v^2=(\frac{dx}{dt})^2=\frac{2}{m}(E-\tfrac{1}{2}kx^2)_{x=a}=0 \;\Rightarrow\; E=\tfrac{1}{2}ka^2$$

بالتعويض في (1-35) نجد:

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{k}{m}(a^2-x^2)} \;\Rightarrow\; \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\;dt$$

بإجراء التكامل نجد :

$$\sin^{-1}(x/a)=\pm\sqrt{k/m}\;t \;\Rightarrow\; x=a\sin(\omega t)$$

حيث وضعنا $\omega=\sqrt{k/m}$.

إن هذا الحل هو مانتوقعه لجسيم خاضع لقوة إرجاع (مربوط بزنبرك) إلاّ أننا نلاحظ أننا توصلنا له بإجراء تكامل واحد فقط مع العلم أن معادلة الحركة هي تفاضلية من الدرجة الثانية، وذلك نتيجة ثبات الطاقة الميكانيكية الكلية. ❐

1-8 درجات الحرية وثوابت الحركة

تتحدد حركة جسيم يتحرك على خط مستقيم بمعرفة موضعه x في كل لحظة من الزمن، لذا نقول إن له **درجة حرية** واحدة *(one degree of freedom)*. لو كان الجسم يتحرك في مستو لاحتجنا إلى إحداثيين لتحديد موضعه ونقول إن له درجتين من الحرية وإذا تحرك في الفضاء فإن له ثلاث درجات من الحرية. فدرجة الحرية هي إحدى الإحداثيات اللازمة لتحديد موضع جسم أو منظومة. فمنظومة مؤلفة من كتلتين تتدحرجان على سطح مستو لهما أربع درجات من الحرية، ولو كانت المسافة بينهما ثابتة عندئذ يمكن معرفة إحدى هذه الدرجات من البقية، لذلك نقول إن للمنظومة في هذه الحالة ثلاث درجات من الحرية، وهكذا دواليك.

من جهة أخرى فإن حل معادلة الحركة لجسيم يتحرك على خط مستقيم يعني حل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية، فإن كانت طاقته الكلية ثابتة لأمكن الوصول للحل بتكامل واحد فقط، كما وجدنا من (1-36)، لذلك نقول إن الطاقة هي **تكامل أولي** *(first integral)*، أو **ثابت حركة** *(constant of motion)*، لأنها لاتتغير مع مرور الزمن. كما تسمى المعادلة (1-36) **تكامل الطاقة** *(energy integral)*.

نستنتج مما تقدم أن وجود ثوابت حركة يعفي من إجراء تكامل لمعادلات الحركة، ولو كان هناك ثابت حركة آخر لأمكن تحديد حالة جسم يتحرك على خط مستقيم كلياً دون إجراء أي تكامل بتاتاً. بشكل عام إذا كان لمنظومة ما عدد من ثوابت الحركة فإن عدد درجات الحرية لها تنخفض بمقدار ذلك العدد.

1 - 9 دراسة الحركة من معادلة الطاقة

يمكن الاستفادة من ثبات الطاقة الميكانيكية لدراسة أنواع الحركة الممكنة لجسيم أو منظومة من معادلة الطاقة، إذا نلاحظ من (1-35) أن المقدار الموجود تحت الجذر يجب أن يكون أكبر أو يساوي الصفر على الأقل وهذا هو المفتاح الأساس لدراسة الحركة.

فإذا رسمنا تغيرات طاقة الوضع $U(x)$ لجسم مع بعده عن المبدأ x كما في الشكل (1-3)، الذي يسمى **بئر كمون** (*potential well*)، عندئذ نلاحظ مايلي:

1 – لايمكن أن تكون الطاقة الكلية للجسم أقل من $E_0 = U(x_0)$ حتى لايصير المقدار المجذور $E - U(x)$ سالباً.

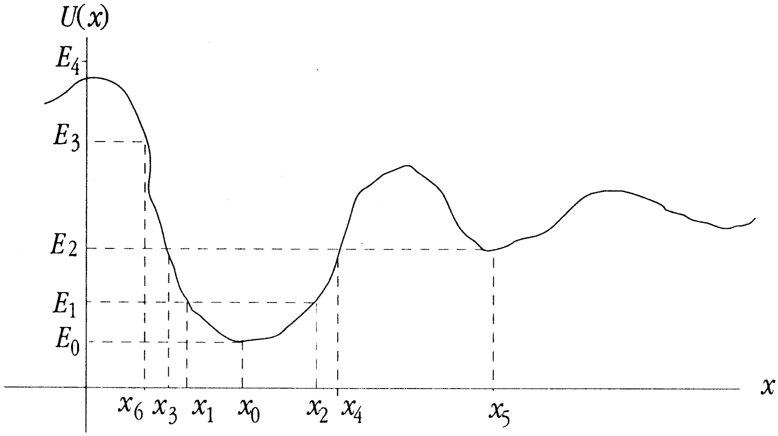
2 – إذا كانت $E = E_0 = U(x_0)$ عندئذ يبقى الجسم ساكناً عند x_0 لأن طاقته الحركية ستكون معدومة دوماً. تسمى x_0 نقطة **اتزان مستقر** (*stable equilibrium*).

3 – إذا كانت $E_0 < E = E_1 < E_2$ عندئذ ستبقى حركة الجسم محصورة بين النقطتين x_1 و x_2 لأن طاقته الحركية تصير معدومة عند كل منهما (لماذا؟)، فيقف عند إحداهما ويعود أدراجه باتجاه الثانية، وهكذا دواليك. لذلك تسمى كل من هاتين النقطتين **نقطة دوران** (*turning point*) وتصير الحركة **دورية** (*periodic*) بينهما. فإذا كانت E أكبر بقليل من E_0 عندئذ تصير الحركة اهتزازية بسيطة حول النقطة x_0. سنرى بعد قليل كيف نحدد دورها وترددها.

4 – إذا كانت $E = E_2$ وكان الجسم أصلاً بين x_3 و x_4 فسيبقى هناك إلى الأبد. كما أنه لايمكن أن يكون عند النقطة $x < x_3$ أو $x_5 > x > x_4$. فإما أن يتحرك اهتزازياً بين x_3 و x_4 أو يبقى ساكناً تماماً عند x_5.

5 – إذا كانت $E = E_3$ وكان الجسم يتحرك بالاتجاه السالب لمحور السينات فإن أقرب نقطة سيصل إليها من المبدأ هي x_6 ليقف عندها لحظياً ثم يعود أدراجه بالاتجاه الموجب إلى الأبد.

6 – إذا كانت $E > E_4$ عندئذ لايوجد نقاط دوران ويتحرك الجسم باتجاه واحد طوال الوقت.



الشكل (3-1)

تردد الاهتزازات الصغيرة حول موضع اتزان مستقر :

نعود الآن إلى الحالة التي تكون فيها الطاقة الميكانيكية للجسم أكبر بقليل من طاقة الوضع الصغرى له (مثل $U(x_0)$ أو $U(x_5)$)، عندئذ يمكن نشر $U(x)$ حول تلك النهاية الصغرى، فنكتب:

$$U(x)=U(x_0)+\frac{1}{1!}\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0)+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2+\cdots \qquad (37-1)$$

بماأنه بإمكاننا إضافة أو طرح حد ثابت من طاقة الوضع بدون أن يؤثر ذلك على حل المسألة (أي أننا نغير موضع الأرض مثلاً في حالة طاقة الوضع للجاذبية)،لذلك نسقط الحد الثابت $U(x_0)$ من (37-1).كما نلاحظ أن $U(x)$ سيكون أصغر مايمكن (نهاية صغرى) عندما:

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_0}=0$$

و

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_0}>0$$

لذلك نعيد كتابة (37-1) على النحو:

$$U(x)=\frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}\bigg|_{x=x_0} x'^2 + O(x'^3) \qquad (38-1)$$

حيث $x' = x - x_0$، بينماتدل $O(x'^3)$ على كثير حدود في x' من الدرجة الثالثة أو أكبر.

فإذا فرضنا أن x ستبقى قريبة بشكل كاف من x_0 (أي أن E ليست أكبر بكثير من $U(x_0)$) عندئذ يمكن إهمال $O(x'^3)$ وتؤول $U(x)$ إلى:

$$U(x')=\frac{1}{2}k\,x'^2 \qquad (39-1)$$

حيث وضعنا

$$k=\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right)_{x=x_0} \qquad (40-1)$$

من الواضح أن (39-1) تشبه طاقة الوضع لهزاز بسيط (كجسم مربوط بزنبرك) بحيث أن سرعته الزاوية هي:

$$\omega^2=\frac{k}{m}=\frac{1}{m}\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right)_{x=x_0} \qquad (41-1)$$

ويتغير بعد الجسم عن موضع الاتزان (x_0) وفق العلاقة:

$$x' = a\cos(\omega t+\phi) \qquad (42-1)$$

وتصيرالحركة اهتزازية بسيطة حول x_0 سعتها العظمى a وترددها ω.

يطلق على النقاط التي يكون عندها $U(x)$ أصغر مايمكن نقاط **اتزان مستقر** (*stable equilibrium*)، وعلى النقاط التي يكون عندها أكبر مايمكن نقاط **اتزان قلق** (غير مستقر *unstable*) (*equilibrium*)، بينما تسمى المنطقة التي يكون فيها ثابتاً **المنطقة المحايدة** (*neutral region*).

نشير أخيراً إلى أنه إذا كانت طاقة الوضع لجسم خاضع لقوى محافظة معلومة، عندئذ يمكن إيجاد القوة المؤثرة عليه من العلاقة:

$$F = -\frac{dU(x)}{dx} \qquad (43-1)$$

❐ مثل 1-5

يتحرك جسيم على خط مستقيم تحت تأثير قوة طاقة وضعها $U(x) = (1-\alpha x)e^{-\alpha x}$، حيث α ثابت موجب حدد مواضع الاتزان (إن وجدت)، وأنواعها، وتردد الاهتزازات الصغيرة حول مواضع الاتزان المستقر منها، ثم جد القوة المؤثرة على الجسيم.

الحل : لتحديد مواضع الاتزان نضع:

$$\frac{dU(x)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha x}(\alpha^2 x - 2\alpha) = 0$$

فهناك إذاً نقطة اتزان واحدة عند $x = 2/\alpha$.

لمعرفة فيما إذا كان هذا الاتزان مستقراً نحسب:

$$\left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=2/\alpha} = e^{-\alpha x}(3\alpha^2 - \alpha^3 x)\Big|_{x=2/\alpha} = \alpha^2 e^{-2} > 0$$

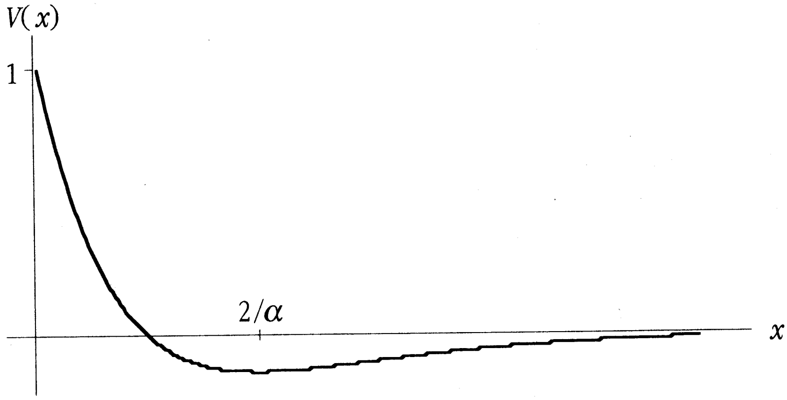
فالاتزان مستقر، ونجد تردد الاهتزازات الصغيرة حوله من (1-41) فنجد:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m}\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right)_{x=2/\alpha} = \frac{\alpha^2}{me^2}$$

أخيراً نجد القوة المؤثرة على الجسيم من (1-43) ونكتب:

$$F = -\frac{dU(x)}{dx} = e^{-\alpha x}(2\alpha - \alpha^2 x)$$

يوضح الشكل (1-4) تغيرات $V(x)$ مع x حيث نلاحظ منه أنه إذا صارت إزاحة الجسيم حول موضع الاتزان المستقر كبيرة فإن اهتزازاته لاتبقى بسيطة بل تصير غير توافقية *(anharmonic)*. ❐



الشكل (1-4)

1 - 10 السقوط الحر (Free Fall)

يعتبر السقوط الحر من أشهر وأبسط الأمثلة على حركة الأجسام على خط مستقيم حيث يخضع الجسم لوزنه فقط.

إذا افترضنا أن الحركة تتم على المحور oy المتجه للأسفل عندئذ نكتب معادلة الحركة على النحو :

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=+mg \qquad (44-1)$$

وحل هذه المعادلة في غاية السهولة ولاداع لإجرائه في هذا المقام .

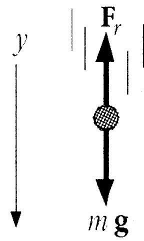
أما إذا خضع الجسم لمقاومة هواء متناسبة مع سرعته على النحو $F_r = -bv$، مثلاً حيث تدل b على ثابت تناسب قوة التخامد، عندئذ تصير معادلة الحركة:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=m\frac{dv}{dt}=+mg-bv \qquad (45-1)$$

حيث افترضنا الاتجاه الموجب للأسفل، كما في الشكل (1-5).

بحل (1-45) بالنسبة للسرعة v نجد:

$$v=\frac{mg}{b}(1-e^{-\frac{b}{m}t}) \qquad (46-1)$$



الشكل (5-1)

فإذا كان b صغيراً عندئذ يمكن نشر $e^{-\frac{b}{m}t}$ فنجد:

$$v \approx gt + \frac{bg}{2m}t^2 + \ldots \quad (47-1)$$

حيث نلاحظ أنه عند بداية سقوط الجسم (أي عندما $t << m/b$) تكون سرعته مماثلة لحالة السقوط الحر بدون تخامد إطلاقاً، إذ يكون:

$$v \approx gt \quad (48-1)$$

بعد مرور فترة زمنية كافية (أي $t >> m/b$ بحيث نهمل $e^{-\frac{b}{m}t}$) تصير سرعة الجسم عملياً ثابتة:

$$v_t \approx \frac{mg}{b} \quad (49-1)$$

تسمى v_t **السرعة النهائية** (*terminal speed*)، ونعرّفها بشكل عام أنها السرعة التي يصل إليها الجسم عندما تصير محصلة القوى المؤثرة عليه مساوية للصفر.

فإن سقط جسم في وسط تتناسب مقاومته مع مربع السرعة مثلاً عندئذ يمكن إيجاد السرعة النهائية بكتابة:

$$mg = bv_t^2 \quad (50-1)$$

ومنه:

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{b}} \quad (51-1)$$

❒ **مثل 1-6**

يقذف جسيم كتلته m نحو الأعلى بسرعة ابتدائية v_0 في وسط لزج تتناسب مقاومته مع السرعة الآنية للجسيم. ماأعلى ارتفاع يصل إليه؟

الحل: من الواضح أن كلاً من قوة الجاذبية ومقاومة الوسط تتجهان للأسفل بعكس اتجاه الحركة، لذا نكتب معادلة الحركة مفترضين الاتجاه الموجب نحو الأعلى، فنجد:

$$-(mg + bv) = m\frac{dv}{dt}$$

بملاحظة الشروط الابتدائية ($v(0)=v_0$) نجد:

$$v = (\frac{mg}{b} + v_0)e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}$$

ثم نحسب الزمن اللازم للوصول إلى أعلى ارتفاع بوضع $v=0$ فنجد:

$$t_{\max} = \frac{m}{b}\ln(\frac{mg + bv_0}{mg})$$

كما نجد ارتفاع الجسيم الآني من السرعة اللحظية v:

$$y = \int vdt = (\frac{m}{b})(\frac{mg}{b} + v_0)(1 - e^{-\frac{b}{m}t}) - \frac{mg}{b}t$$

حيث وضعنا $y(0)=0$. بتعويض t_{max} في العلاقة السابقة نجد:

$$y_{\max} = \frac{mv_0}{b} - \frac{m^2 g}{b^2}\ln(\frac{mg + bv_0}{mg})$$

❒

1 - 11 سقوط الأجسام من ارتفاعات شاهقة وتغير تسارع الجاذبية

ينص قانون الجاذبية العام على أن قوة التجاذب بين جسمين m وM، البعد بينهما r كبير بالمقارنة مع أبعاد أي منهما، تعطى بالعلاقة:

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \qquad (52-1)$$

حيث G ثابت الجاذبية العام ويساوي $6.6\times10^{-11}\ N.m^2/kg^2$.

بما أن القوة تعتمد على الموضع لذلك نكتب طاقة الوضع على النحو:

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} F(r)\,dr \qquad (53-1)$$

حيث اعتبرنا الموضع الاختياري $r_s = \infty$ حيث تنعدم القوة المؤثرة على الجسم وطاقة وضعه.

بأجراء التكامل نجد:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \qquad (54-1)$$

وتصير معادلة تكامل الطاقة:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \qquad (55-1)$$

ومنها :

$$v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{GMm}{r}\right)} \qquad (56-1)$$

حيث نعتبر الإشارة + عندما يتحرك الجسم للأعلى والإشارة - عندما يتحرك للأسفل.

نعتبر فيمايلي سقوط جسيم m من ارتفاع شاهق بالنسبة لنصف قطر الأرض ونعتبر الاحتمالين التاليين :

(أ) — $E < 0$ أي أن الجسم مرتبط بالأرض *(bound)*:

نلاحظ أن ارتفاع الجسم لايمكن أن يتجاوز مقداراً معيناً r_{max} حيث يصير المقدار المجذور في (56-1) مساوياً للصفر، أي عندما :

$$E + \frac{GMm}{r_{max}} = 0 \qquad (57-1)$$

ومنه :

$$r_{\max} = -\frac{GMm}{E} \qquad (58-1)$$

نلاحظ من (1-56) أنه عندما تصير $r = r_{max}$ فإن سرعة الجسم (نحو الأعلى) تنعدم ويعود أدراجه نحو الأرض.

(ب) – $E > 0$ أيْ أن الجسم حر الحركة (*unbound*)

إذا كان الجسم يتحرك مبدئياً نحو الأعلى فسيبقى كذلك إلاّ أن سرعته ستتناقص تدريجياً إلى أن تبلغ قيمة تثبت عندها، عندما تصير r كبيرة، بحيث يمكن إهمال الحد GMm/r بالمقارنة مع E في (1-56) وتصير سرعة الجسم النهائية:

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \qquad (59-1)$$

حيث وضعنا $GM = g_e R_e^2$ ، بفرض أن g_e تسارع الجاذبية على سطح الأرض (أو أي كوكبٍ أو نجم آخر).

نعود الآن الى حل المعادلة (1-57) ونكتب:

$$v = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{GMm}{r}\right)} \qquad (60-1)$$

أو :

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{\left(E + \frac{GMm}{r}\right)}} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\,t \qquad (61-1)$$

بإجراء التكامل السابق نصل لعلاقة تربط تغيرات r مع t .

❑ مثل 1-7

يسقط جسيم من ارتفاع H عن سطح الأرض (كبير بالمقارنة مع نصف قطر الأرض). ماسرعته لحظة ارتطامه بالأرض وكم يستغرق من الزمن للوصول إليها؟

الحل: لنحسب الطاقة الميكانيكية الكلية للجسيم فنلاحظ أنها طاقة وضع لحظة سقوطه، أي :

$$E_1 = -GmM / r = -GmM / (R + H)$$

أما طاقته لحظة وصوله للأرض فهي طاقة وضع وحركة ، أي :

$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2 - GmM / r = \frac{1}{2}mv^2 - GmM / R$$

بوضع $GM = gR^2$ ومساواة الطاقتين نجد:

$$v = \sqrt{2gRH / (R+H)}$$

لحساب الزمن اللازم للجسيم للوصول للأرض نضع $E_1 = E_2$ عند نقطة ما تبعد r عن مركز الأرض ونحل بالنسبة للسرعة v فنجد:

$$v = \sqrt{2gR^2}\ \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R+H}} = \frac{dr}{dt}$$

ومنه:

$$t = \int_0^t dt = \frac{1}{\sqrt{2gR^2}} \int_{R+H}^{R} \frac{dr}{\sqrt{1/r - 1/(R+H)}}$$

بإجراء التكامل السابق (بصعوبة) يمكن تحديد الزمن t. ❐

---

1 - 12 قوة الإرجاع الخطية والحركة الاهتزازية البسيطة

لعل الحركة الإهتزازية البسيطة هي أهم مثل على الحركة على خط مستقيم، حيث يخضع الجسيم لقوة إرجاع تتناسب مع بُعده عن نقطة اتزان محددة وتتجه نحوها.

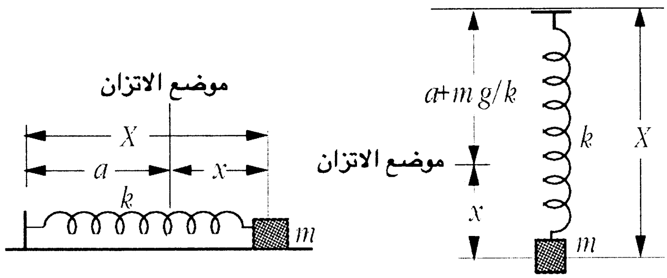
تعطى هذه القوة بقانون هوك *(Hook's Law)* (أنظر الشكل (1-6)):

$$F = -k(X - l_0) = -kx \qquad (1-62)$$

حيث X طول الزنبرك الآني الكلي و l_0 طوله الطبيعي (حمولة معدومة)، بينما $x = X - l_0$ على استطالة، أو انضغاط، الزنبرك بالنسبة لطوله الطبيعي. يدعى ثابت التناسب k **ثابت قوة الزنبرك** *(spring force constant)*.

نلاحظ من الشكل (1-6أ) أنه إذا عُلق الجسيم بالزنبرك بوضع شاقولي فإن القوة الكلية المؤثرة عليه هي:

$$F=-k[X-(a+\frac{mg}{k})]=-kx \tag{63-1}$$



(ب) الشكل (6-1) (أ)

حيث اعتبرنا الاتجاه الموجب نحو الأسفل، وتصير x مساوية الى:

$$x=X-(a+\frac{mg}{k}) \tag{64-1}$$

إذاً بغض النظر عن طريقة تعليق الجسيم بالزنبرك فإن معادلة الحركة تكتب بالشكل :

$$m\ddot{x}=-kx \tag{65-1}$$

أو

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0 \tag{66-1}$$

حيث يعطى **التردد الزاوي الطبيعي** للنظام ω_0 بالعلاقة:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{67-1}$$

ونكتب الحل العام للمعادلة (65-1) بالشكل :

$$x=A\cos(\omega_0 t+\phi) \tag{68-1}$$

تمثل x **السعة الانية** *(instantaneous amplitude)*، و ϕ **الطور الابتدائي** *(initial phase)* و A **السعة العظمى** *(maximum amplitude)*، أما الزاوية $(\omega_0 t+\phi)$ فتدعى **الطور الآني** أو **الطور** فقط *(instantaneous phase)*.

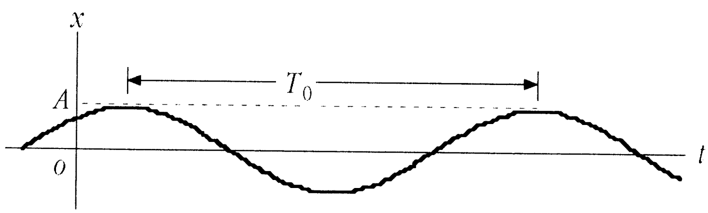
نستنتج من الحل (1-70) أن الحركة اهتزازية بسيطة ، دورها T_0 وترددها ν_0 حيث:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (69-1)$$

و

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (70-1)$$

يعطى الشكل (1-7) تغيرات السعة الآنية (أو السعة *(amplitude)*) x مع الزمن .



الشكل (1-7)

يمكن كتابة الطاقة الكلية للجسيم m مباشرة:

$$E = \tfrac{1}{2} m v^2 + V(x) \qquad (71-1)$$

حيث:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \qquad (72-1)$$

و

$$V(x) = \tfrac{1}{2} k x^2 = \tfrac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \qquad (73-1)$$

ثم نكتب الطاقة الكلية:

$$E = \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{2} k x^2 = \tfrac{1}{2} k A^2 \qquad (74-1)$$

نلاحظ من (74-1) أن الطاقة الكلية ثابتة وهذا طبيعي لأن القوة المؤثرة على الجسم محافظة، بالتالي يمكن الاستفادة منها لحساب سرعته في كل لحظة بدلالة بُعده عن وضع الاتزان، x ، حيث أن:

$$v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \tfrac{1}{2}kx^2\right)} \qquad (75-1)$$

هذا ما وجدناه سابقا بالنسبة لجسيم خاضع لقوة محافظة.

نلاحظ أن السرعة القصوى التي يصل اليها الجسيم (عند $x=0$) هي:

$$v_{\max} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,A = \pm\omega_0 A \qquad (76-1)$$

13 - 1 الحركة الاهتزازية البسيطة المتخامدة

أهملنا في الفقرة السابقة قوى الاحتكاك أو التخامد*(damping)* التي يمكن أن تؤثر على الجسيم المهتز خلال حركته. وحيث أن قوى كهذه ستوجد دائما في الطبيعة فإنه من الضروري إدخالها في معادلة الحركة.

إذا افترضنا ان قوى التخامد تتناسب مع السرعة اللحظية للجسيم عندئذ نكتب معادلة حركته بالشكل :

$$F = -k\,x - b\,\dot{x} = m\,\ddot{x} \qquad (77-1)$$

حيث تدل b على ثابت تناسب قوة الاحتكاك، أو ثابت التخامد (*damping factor*).

نكتب معادلة الحركة بالشكل :

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (78-1)$$

حيث وضعنا:

$$\gamma = \frac{b}{2m} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (79-1)$$

حل المعادلة (78-1) هو:

$$x = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \tag{80-1}$$

حيث:

$$r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{81-1}$$

نميز هنا الحالات التالية :

أ ـ تخامد مفرط *(over damping)* أي أن $b^2 >> 4mk \Leftarrow \gamma >> \omega_0$ عندئذ تصير $\delta = -\gamma$ وتعطى x بـ

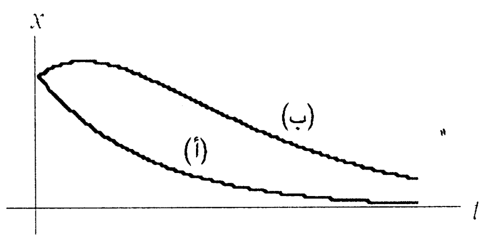
$$x = Ae^{-\gamma t} \tag{82-1}$$

فتتناقص السعة أُسياً *(exponential decay)* مع الزمن وتموت الحركة تدريجيا وبشكل مباشر، كما في الشكل (1-8أ).

ب ـ تخامد حرج *(critical damping)* $b^2 = 4\,k\,m$ أي أن $\gamma = \omega_0$ عندئذ يصير للمعادلة المميزة (1-81) جذراً مضاعفاً $r_{1,2} = -\gamma$ ويعطى حل المعادلة (1-80) عندئذ بالشكل :

$$x = (A + Bt)e^{-\gamma t} \tag{83-1}$$

يمثل الشكل (1-8ب) تغيرات x مع الزمن في هذه الحالة.



الشكل (1-8)

جـ ـ تخامد ضعيف *(under damping)* $b^2 < 4\,mk \Leftarrow \gamma < \omega_0$ عندئذ يُصير للمعادلة المميزة (1-81) حلين من الشكل :

$$r_{1,2} = -\gamma \pm i\omega \tag{84-1}$$

حيث :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{85-1}$$

يُعطى الحل العام للمعادلة (1-80) في هذه الحالة بالعلاقة :

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \tag{86-1}$$

تمثل المعادلة (1-86) حركة اهتزازية بسيطة تتناقص سعتها مع مرور الزمن بمعدل $\exp(-\gamma T)$ (حيث رمزنا لدور الحركة بـ $T = 2\pi/\omega$) في كل دورة .

يمكن تحديد طاقة النظام في هذه الحالة بوضع :

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \tag{87-1}$$

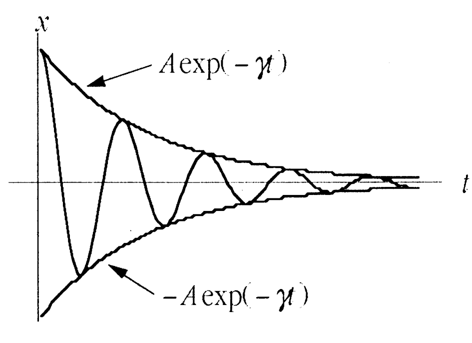
نلاحظ هنا أن :

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) \tag{88-1}$$

بحسب المعادلة (1-77) نجد أن :

$$\frac{dE}{dt} = -b\dot{x}^2 \tag{89-1}$$

تمثل المعادلة الاخيرة معدل خسارة الطاقة نتيجة الاحتكاك . ويعطي الشكل (1-9) تغيرات x مع t في هذه الحالة .



الشكل (1-9)